

Se consideră sistemul de ecuații liniare (S):
$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -x + 3y + 4z = 1 + m \\ 2x + y - mz = 3 \end{cases}, \text{ unde } m \in \mathbb{R}.$$

(10p) 1) Rezolvați ecuația :
$$\begin{vmatrix} t & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & t & -1 \end{vmatrix} = 0, t \in \mathbb{R};$$

(10p) 2) Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care matricea sistemului (S) are rangul 2 și sistemul este compatibil;

(5p) 3) Pentru $m = 1$, găsiți tripletul (x, y, z) pentru care $x + y + z = 2$.

(5p) 4) Arătați că există cel puțin două perechi (a, b) de numere reale pentru care funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 + x + a & , x \leq 0 \\ b + \sin x & , x > 0 \end{cases}$ este derivabilă pe \mathbb{R} .

Se consideră funcțiile $f, g, h, j: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin: $f(x) = x \cdot \sin x$, $g(x) = \frac{2x+1}{1+x^2}$,
 $h(x) = \sqrt{1+3x}$ și $j(t) = e^{t+t^2}$.

(15p) 5) Calculați $f'(\pi)$, $g'(0)$, $h'(1)$ și $j'(0)$.

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 + m$, $m \in \mathbb{R}$.

(5p) 6) Pentru $m = 2$, scrieți ecuația tangentei la graficul funcției considerate în punctul $x_0 = 1$;

(5p) 7) Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care $f''(a) = 6$;

(5p) 8) Pentru $m = 1$, determinați $f([0, 2])$;

(5p) 9) Determinați, pentru $m = 1$, numărul rădăcinilor reale ale ecuației $f(x) = 0$;

(5p) 10) Arătați că, pentru orice $m \in \mathbb{R}$, funcția f are două puncte de extrem local.

(5p) 11) Găsiți funcția derivabilă $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care $f(1) = 1$ și $x \cdot f'(x) = 2$, $\forall x \in (0, \infty)$.

(5p) 12) Dacă $a, b \in (0, \infty)$ și $a^x + b^x \geq 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, calculați valoarea produsului $a \cdot b$.

Notă: Din oficiu se acordă 20 de puncte.